3.3. Međusobni položaj dviju kružnica u ravnini

Broj sati: 2

*Udžbenik: stranice 140. – 145.*

**Odgojno – obrazovni ishod**

C.8.4. Prikazuje međusobne odnose dviju kružnica u ravnini.

**Međupredmetne teme**

uku A.3.2. Primjena strategija učenja i rješavanje problema

uku A.3.4. Učenik kritički promišlja i vrednuje ideje uz podršku učitelja.

uku B.3.3. Učenik regulira svoje učenje mijenjanjem plana ili pristupa učenju, samostalno ili uz poticaj učitelja.

uku B.3.4. Učenik samovrednuje proces učenja i svoje rezultate, procjenjuje ostvareni napredak te na temelju toga planira buduće učenje.

osr A.3.1. Razvija sliku o sebi.

osr A.3.3. Razvija osobne potencijale.

osr B.3.2. Razvija komunikacijske kompetencije i uvažavajuće odnose s drugima

osr B.3.4. Suradnički uči i radi u timu.

ikt A.3.2. Učenik se samostalno koristi raznim uređajima i programima.

**Tijek nastavnih sati**

* **Međusobni položaj dviju kružnica u ravnini**

**Aktivnost 1 – Vrednovanje naučenoga**

Učitelj provodi kratku pisanu provjeru kroz Listiće za vrednovanje naučenoga (3.1. – 3.2.) (vrednovanje naučenoga).

**Aktivnost 2 – Ponovimo**

Učenici su u prethodnim razredima učili o kružnici. Definirali su je te opisivali njezine elemente (polumjer, promjer, tetiva), računali njezin opseg, ...

Učitelj prikuplja informacije o prethodnim znanjima učenika i miskoncepcijama učenika o kružnici (vrednovanje za učenje).

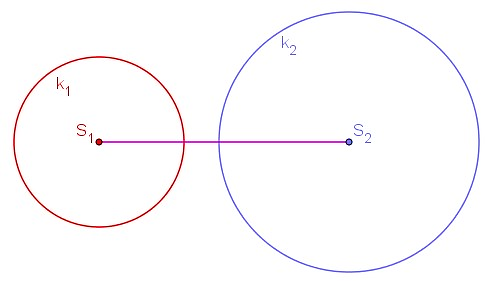
**Aktivnost 3 – Istraživanje: Koliko zajedničkih točaka mogu imati dvije kružnice?**

Učitelj učenicima dijeli listić (*Prilog 1*) i daje upute za rad. Učenici trebaju pretpostaviti koliko zajedničkih točaka mogu imati dvije kružnice, a zatim svoju pretpostavku provjeriti rješavanjem ponuđenih zadataka.

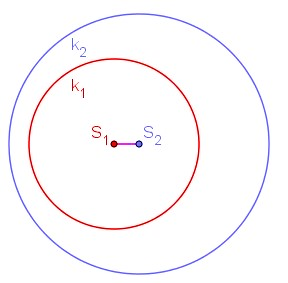
**Aktivnost 4 – Međusobni položaj dviju kružnica u ravnini**

Uz razgovor s učenicima pomoću prezentacije (e-sfera: Geometrija u ravnini -> Međusobni položaj dviju kružnica u ravnini -> e-Matematika -> Međusobni položaj dviju kružnica)ili interaktivne simulacije (e-sfera: Geometrija u ravnini -> Međusobni položaj dviju kružnica u ravnini -> e-Matematika -> Interaktivna simulacija Međusobni položaj dviju kružnica) učitelj pokazuje sve međusobne položaje dviju kružnica u ravnini sistematizirajući tako sve što je uočeno tijekom istraživanja.

1. **Kružnice nemaju zajedničkih točaka**

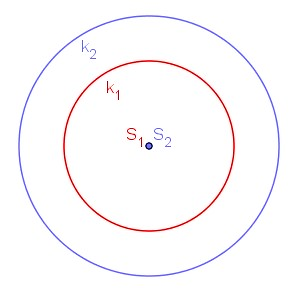
**a)**





**b)**





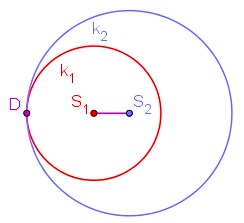
Kružnice sa zajedničkim središtem, a različitih

radijusa nazivamo **koncentrične kružnice**.

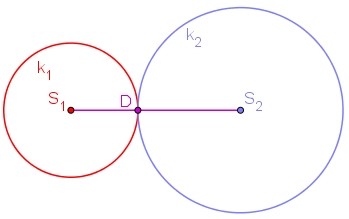
1. **Kružnice imaju jednu zajedničku točku – DODIRUJU SE**

Za dvije kružnice koje imaju jednu zajedničku točku kažemo da se dodiruju, a njihovu zajedničku točku nazivamo diralište kružnica.

**a)** Kružnice se **dodiruju iznutra.**



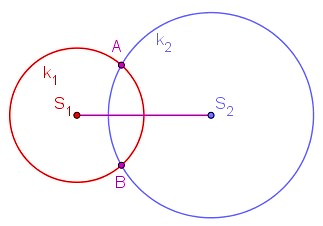


**b)** Kružnice se **dodiruju izvana.**



1. **Kružnice imaju dvije zajedničke točke – SIJEKU SE**

Za dvije kružnice koje imaju dvije zajedničke točke kažemo da se sijeku, a njihove zajedničke točke nazivamo sjecišta kružnica.





Učenici rješavaju zadatak 115. te samostalno provjeravaju ispravnost rješenja. Učitelj pomaže, usmjerava i vodi kroz proces samovrednovanja (vrednovanje kao učenje).

Listići za vrednovanje za učenje\_općenito: Pr.1. – Pr.5.

**Primjeri vrednovanja**

* Vrednovanje kao učenje:
* Aktivnosti 3, 4– samovrednovanje ispravnosti rješavanja zadataka
* Vrednovanje za učenje:
  + Aktivnost 2– prikupljanje informacija o prethodnim znanjima
  + Aktivnost 4– listići za vrednovanje za učenje
* Vrednovanje naučenoga
* Aktivnost 1 – Listići za vrednovanje naučenoga

**Razrađeni problemski zadaci, zadaci za poticanje kritičkog razmišljanja, kreativnosti i/ili istraživački zadaci**

* Aktivnost 3 (*Prilog 1*)

**Aktivnosti koje obuhvaćaju prilagodbu za učenike s teškoćama**

* Dopunski zadatci: 128.
* T. Djaković, L. Havranek Bijuković, Lj. Peretin, K. Vučić: Matematika 8 – udžbenik za pomoć u učenju matematike –

**Aktivnosti za motiviranje i rad s darovitim učenicima**

* Z. Martinec: Matematika 8 plus – zbirka zadataka za dodatnu nastavu matematike –
* M.Muštra: Dodatna nastava matematike za 8.razred –

**Domaća zadaća**

* Zadatci za vježbu: 113., 116., 118.
* **Uvježbavanje**

**Aktivnost 1 – Ponavljanje u paru**

Učitelj prikuplja informacije o prethodnim znanjima učenika i miskoncepcijama učenika o međusobnim položajima dviju kružnica u ravnini (vrednovanje za učenje).

Učenici u paru odgovaraju na pitanje iz rubrike Jeste li razumjeli?

* Koliko zajedničkih točaka mogu imati dvije kružnice? Mogu li kružnice imati tri zajedničke točke? Objasnite odgovor.
* Kako se naziva zajednička točka dviju kružnica koje se dodiruju?
* Kako se naziva zajednička točka dviju kružnica koje se sijeku?
* Je li točna tvrdnja: „Dvije kružnice mogu imati 0, 1 ili 2 zajedničke točke?” Objasnite.
* Skicirajte moguće položaje dviju kružnica različitih duljina polumjera. Zapišite broj zajedničkih točaka tih kružnica.
* Skicirajte moguće položaje dviju kružnica jednakih duljina polumjera. Zapišite broj

zajedničkih točaka tih kružnica.

Zatim slijedi razredna rasprava koju moderira učitelj (vrednovanje kao učenje).

**Aktivnost 2 – Povežite i primijenite**

Učenici rješavaju zadatke 121. i 124. te samostalno provjeravaju ispravnost rješenja. Učitelj pomaže, usmjerava i vodi kroz proces samovrednovanja (vrednovanje kao učenje).

**Aktivnost 3 – Uvježbavanje**

Učenici rješavaju Nastavni listić te samostalno provjeravaju ispravnost rješenja. Učitelj pomaže, usmjerava i vodi kroz proces samovrednovanja (vrednovanje kao učenje).

Učenici rješavaju zadatke na e-sferi: Geometrija u ravnini -> Međusobni položaj dviju kružnica u ravnini -> Matematika + -> provjera znanja Međusobni položaj dviju kružnica u ravnini (kratki kviz) te samostalno provjeravaju ispravnost rješenja. Učitelj pomaže, usmjerava i vodi kroz proces samovrednovanja (vrednovanje kao učenje).

Listići za vrednovanje kao učenje: Pr.1.

Listići za vrednovanje za učenje: Pr.1. i Listići za vrednovanje za učenje\_općenito: Pr.1. – Pr.5.

**Primjeri vrednovanja**

* Vrednovanje kao učenje:
* Aktivnosti 2, 3 – samovrednovanje ispravnosti rješavanja zadataka
* e-sfera: Geometrija u ravnini -> Međusobni položaj dviju kružnica u ravnini -> Matematika + -> provjera znanja Međusobni položaj dviju kružnica u ravnini (kratki kviz)
* Aktivnost 3 – listići za vrednovanje kao učenje
* Vrednovanje za učenje:
  + Aktivnost 1 – prikupljanje informacija o prethodnim znanjima
  + Aktivnost 3 – listići za vrednovanje za učenje

**Aktivnosti za motiviranje i rad s darovitim učenicima**

* Dodatni zadatci: 131. – 133.
* Z. Martinec: Matematika 8 plus – zbirka zadataka za dodatnu nastavu matematike –
* M.Muštra: Dodatna nastava matematike za 8.razred -

**Aktivnosti koje obuhvaćaju prilagodbu za učenike s teškoćama**

* Dopunski zadatci: 129., 130.
* T. Djaković, L. Havranek Bijuković, Lj. Peretin, K. Vučić: Matematika 8 – udžbenik za pomoć u učenju matematike –

**Aktivnosti u kojima je vidljiva interdisciplinarnost**

* Domaća zadaća – Likovna umjetnost

**Domaća zadaća**

* Zadatci za vježbu: 117.
* Povežite i primijenite: 122., 125., 127.
* e-sfera: Geometrija u ravnini -> Međusobni položaj dviju kružnica u ravnini -> Matematika + -> provjera znanja Međusobni položaj dviju kružnica u ravnini (dugi kviz)

**Prilozi pripremi**

**Prilog 1: Istraživanje – Koliko zajedničkih točaka mogu imati dvije kružnice?**

**1.** Koliko zajedničkih točaka mogu imati dvije kružnice? Zapišite svoju pretpostavku.

**2.** Nacrtajte dužinu  i dvije kružnice k1(*A*, 2 cm) i k2(*B*, 3 cm) tako da je:

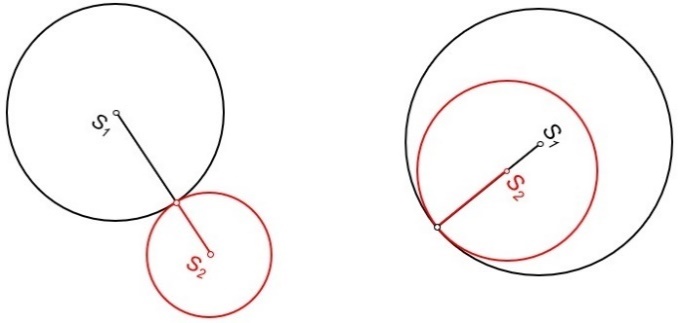
a), b), c), d), e), f), g)

Koliko najviše zajedničkih točaka imaju kružnice? Koliko najmanje?

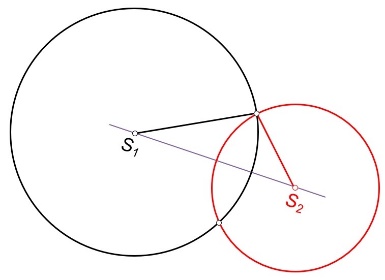
**Primjeri listića za vrednovanje kao učenje, vrednovanje za učenje i vrednovanje naučenoga**

**Vrednovanje kao učenje**

**Primjer 1:** Zadaci za vršnjačko vrednovanje (Prilog A)

● Pitanja:

* U kakvom su međusobnom položaju kružnice na slici?
* Kako se naziva njihova zajednička točka?
* Zadane su kružnice s polumjerima 4 cm i 3 cm, a njihova su središta udaljena 5 cm. U kakvom su međusobnom položaju te kružnice?
* Zadane su kružnice s polumjerima 4 cm i 3 cm, a njihova su središta udaljena 1 cm. U kakvom su međusobnom položaju te kružnice?

♦ Pitanja:

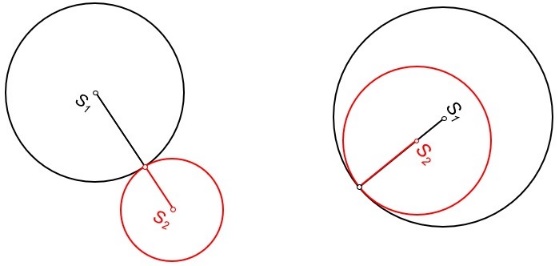
* U kakvom su međusobnom položaju kružnice na slici?
* Kako se nazivaju njihove zajedničke točke?
* Zadane su kružnice s polumjerima 3 cm i 2 cm, a njihova su središta udaljena 6 cm. U kakvom su međusobnom položaju te kružnice?
* Zadane su kružnice s polumjerima 3 cm i 2 cm, a njihova su središta udaljena 5 cm. U kakvom su međusobnom položaju te kružnice?

**Vrednovanje za učenje**

**Primjer 1:** Kviz (Prilog D)

Tvrdnje:

* Kružnice na slici se sijeku u točki A.



*A*

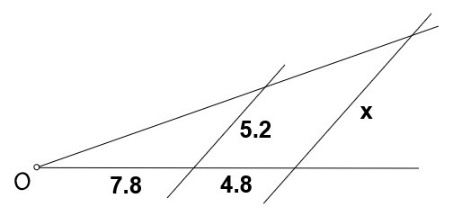
* Zajednička točka dviju kružnica koje se dodiruju naziva se diralište.
* Dvije kružnice koje se sijeku mogu imati najviše tri zajedničke točke.

Zadatci:

* Zadane su kružnice s polumjerima 5 cm i 2 cm, a njihova su središta udaljena 7 cm. U kakvom su međusobnom položaju te kružnice?
* Koliko zajedničkih točaka imaju kružnice duljina polumjera 6 cm i 10 cm ako su njihova središta udaljena 17 cm?

**Vrednovanje naučenoga**

Ime i prezime ................................................................ grupa A

1. Krakovi kuta presječeni su usporednim pravcima. Odredite nepoznatu duljinu *x*.

2. Nacrtajte dužinu  duljine 7.3 cm, a zatim je bez mjerenja podijelite na 3 jednaka dijela.

3. Duljine kateta pravokutnog trokuta odnose se kao 2 : 5, a zbroj je njihovih duljina 8.1 cm. Konstruirajte

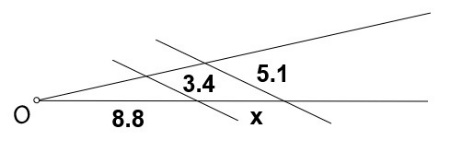
taj trokut.

4. Koeficijent sličnosti dvaju trokuta je  . Odredite duljine stranica većeg trokuta ako su duljine

stranica manjeg trokuta 4.6 cm, 0.6 dm i 42 mm.

Ime i prezime ................................................................ grupa B

1. Krakovi kuta presječeni su usporednim pravcima. Odredite nepoznatu duljinu *x*.



2. Nacrtajte dužinu  duljine 8.7 cm, a zatim je bez mjerenja podijelite na 5 jednakih dijelova.

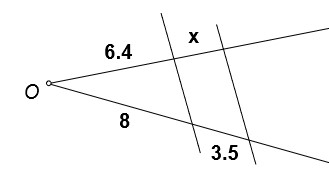
3. Omjer duljine kraka i duljine osnovice jednakokračnog trokuta je 5 : 2, a zbroj njihovih duljina je 7.3 cm.

Konstruirajte taj trokut.

4. Koeficijent sličnosti dvaju trokuta je  . Odredite duljine stranica manjeg trokuta ako su duljine

stranica većeg trokuta 66 mm, 0.72 dm i 3.6 cm.

Ime i prezime ......................................................... grupa C

1. Krakovi kuta presječeni su usporednim pravcima. Odredite nepoznatu duljinu x.

2. Nacrtajte dužinu  duljine 5.3 cm, a zatim je bez mjerenja podijelite na 6

jednakih dijelova.

3. Opseg trokuta je 9.6 cm. Konstruirajte trokut ako mu se duljine stranica odnose

kao 2 : 3 : 4.

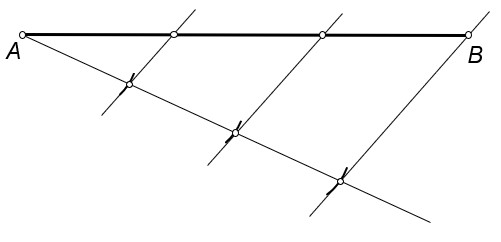
4. Koeficijent sličnosti dvaju trokuta je k = 3. Odredite duljine stranica manjeg

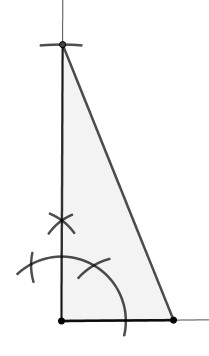
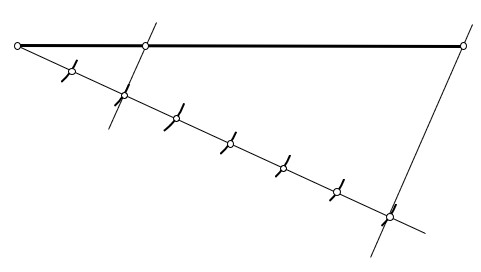
trokuta ako su duljine stranica većeg trokuta 7.2 cm, 4.2 cm i 3.6 cm.

**Rješenja:**

**grupa A**

1. x = 8.4

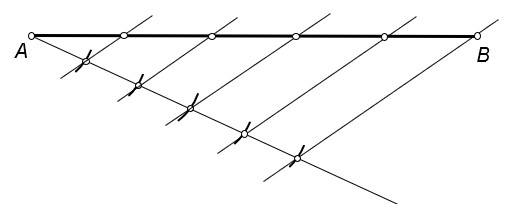
2.



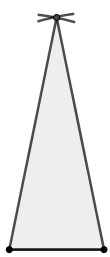
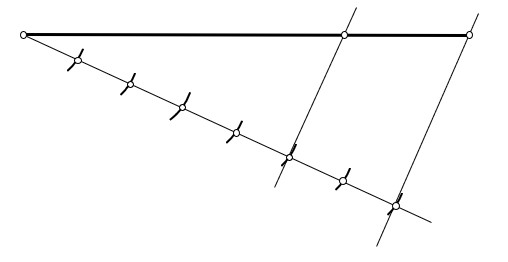
3.

4. 6.9 cm, 9 cm, 6.3 cm

**grupa B**

1. x = 4.4

2.



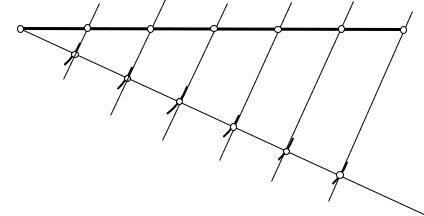
3.

4. 5.5 cm, 6 cm, 3 cm

**grupa C**

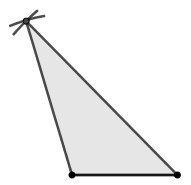
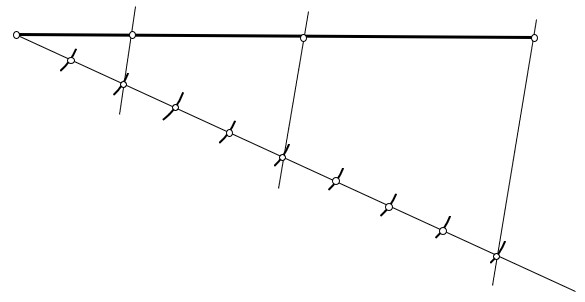
1. x = 2.8

2.



*A*

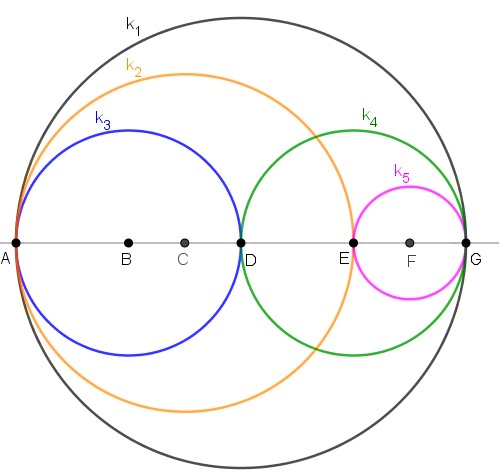
*B*



3.

4. 2.4 cm, 1.4 cm, 1.2 cm

**Nastavni listić**

1. Na slici je prikazano pet kružnica. Dopunite.

a) U kojem su odnosu navedene kružnice?

k1 i k5 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

k3 i k4 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

k3 i k5 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

k2 i k4 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

k2 i k5 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

b) Točka E je diralište kružnica \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .

c) Kojim je kružnicama diralište točka A? \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

d) Na slici označite točkama *X* i *Y* sjecišta jedinog para

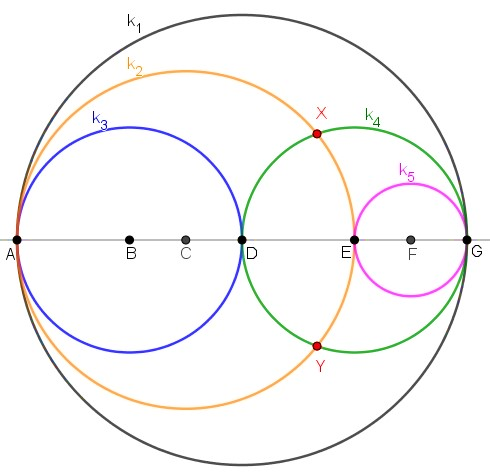
kružnica koje se sijeku.

2. Nacrtajte kružnice *k*1(*A*,32 mm) i *k*2(*B*,1.7 cm) koje nemaju zajedničkih točaka tako da je najmanja

udaljenost njihovih točaka 2 cm.

3. Kružnice *k*1(*A*,r1) i *k*2(*B*,r2) dodiruju se izvana. Koliko se duljine njihovih polumjera ako vrijedi r1 : r2 = 2 : 7 i

.

**Rješenja nastavnog listića**

1. a) - dodiruju se iznutra d)

- dodiruju se izvana

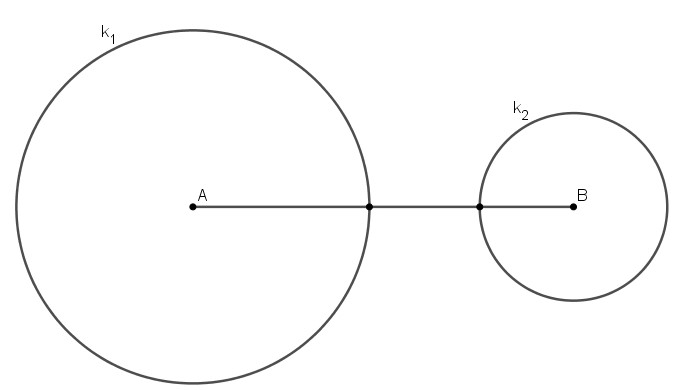
- nemaju zajedničkih točaka

- sijeku se

- dodiruju se izvana

b) k2 i k5

c) k1, k2 i k3



2.

3. r1 = 3 cm, r2 = 10.5 cm.